Aufgabe 2.1

a) Ergänzen Sie das Pascalsche Dreieck bis $n = 10$.

b) Berechnen Sie (klammern Sie aus): $(a+1)^8$, $(a-1)^9$, $(a-b)^{10}$.

Aufgabe 2.2

a) Berechnen Sie: $\binom{7}{1}$, $\binom{12}{0}$, $\binom{12}{7}$, $\binom{13}{5}$, $\binom{50}{48}$, $\binom{28}{4}$.

b) Aus 16 Karten (je 4 Buben, Damen, Könige und Asse) werden 8 gezogen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass darunter

(i) genau 1 Ass,

(ii) kein Ass,

(iii) genau ein Bube, eine Dame, ein König und ein Ass,

(iv) mindestens 2 Asse sind.

Aufgabe 2.3 Berechnen Sie (wählen Sie passende a, b im binomischen Lehrsatz):

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}$,

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}(-1)^k$,

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}2^k$,

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k}$,

e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$,

f) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$.

Aufgabe 2.4 Berechnen Sie die Summe

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{6} k^2$, $\displaystyle\sum_{k=-4}^{4} k^3$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \left(j + \frac{1}{j}\right)$, $\displaystyle\sum_{k=3}^{7}(2k+4)$, $\displaystyle\sum_{j=-1}^{1}(j^2-1)$,

b) $1 + 2 + \ldots + 2016$,

c) positiven ganzen Zahlen mit 3 Ziffern,

d) ungeraden Zahlen zwischen 1000 und 2000,

e) positiven ganzen Zahlen von je maximal 3 Ziffern, die auf 2 oder 7 enden.

f) $\displaystyle\sum_{k=10}^{70}(7k-2)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{14}(5k+3)$, $\displaystyle\sum_{k=-2}^{22}(100k+10)$.

Aufgabe 2.5 Berechnen Sie die Summe

a) $2+4+8+\ldots+256$,

b) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{256}$,

c) $2+6+18+54+\ldots+1458$,

d) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{64}{729}$,

e) $\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\ldots+\frac{3}{10\,000\,000}$,

f) $4+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$, (unendlich)

g) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots$,

h) $1-\frac{9}{10}+\frac{81}{100}-\frac{729}{1000}+\ldots$,

i) $7+\frac{7}{10}+\frac{7}{100}+\ldots$.

Aufgabe 2.6 Finden Sie den unkürzbaren Bruch für die periodische Zahl:
$0{,}\overline{9}$; $0{,}\overline{12}$; $0{,}00\overline{12}$; $10{,}\overline{3}$; $0{,}\overline{2}$; $10{,}\overline{9}$; $0{,}\overline{123}$; $0{,}\overline{10}$; $3{,}\overline{091}$.

Aufgabe 2.7 Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ für:

a) $a_n = \dfrac{n+1}{n}$,

b) $a_n = \dfrac{2n}{n+12}$,

c) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$,

d) $a_n = \dfrac{n^3+3n^2}{3n^4+4}$,

e) $a_n = \dfrac{2n+\sqrt{n}}{n-\sqrt{n}}$,

f) $a_n = \dfrac{n+\frac{1}{n}}{n-\frac{2}{n}}$,

g) $a_n = \dfrac{n^3-1}{n^3+n^2}$,

h) $a_n = \dfrac{4n^2+5n+n\sqrt{n}}{3n^2-2n-1}$,

i) $a_n = \dfrac{n^2+1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

Aufgabe 2.8 Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{3^n}$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n!}$,

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^n}{n^n+n!}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2^n}{n^2-2^n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-2^{-n}}{2^n-1}$,

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n+1}$,

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}-1}{2^{3n}-3^{2n}}$,

h) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+3n-7)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-3^n}{n^3+3^n}$,

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2}{n+2^{-n}}$,

k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n!}{3^n-n!}$,

l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!+3n^9-7}{n^n+3n^9+7}$.